1. ГРУПЕ, ПОЉА И ЛИНЕАРНИ ВЕКТОРСКИ ПРОСТОРИ

(1.1) Показати да скуп целих бројева $\mathbb{Z}=\{-\infty,\ldots,-1,0,1,\ldots,\infty\}$ *јесте* група *група* у односу на бинарну операцију уобичајеног сабирања целих бројева: $a+b=c,\ (a,b,c\in\mathbb{Z})$.

Да би скуп целих бројева $\mathbb{Z}$ био група у односу на бинарну операцију сабирања целих бројева, за њега морају важити следеће особине:

А1. *затвореност*: на основу дате дефиниције сабирања целих бројева следи да, ако су бројеви $a,b\in\mathbb{Z}$, онда је и резултујући број $c\in\mathbb{Z}$.

А2. *асоцијативност*: небитно је којим се редоследом сабирају три цела броја

$$(1+(-2))+3=-1+3=2=1+1=1+((-2)+3).$$

А3. постоји *неутрални елемент* бинарне операције сабирања целих бројева

$$a+0=a,$$

$$0+a=a.$$

Будући да нула 0 јесте цели број, она представља неутрални (*нулти*) елемент код уобичајеног сабирања целих бројева.

А4. постоје *инверзни елементи* за сваки број из скупа $\mathbb{Z}$

$$a+inv=0 \Leftrightarrow inv=0-a \Leftrightarrow inv=-a,$$

$$inv+a=0 \Leftrightarrow inv=0-a \Leftrightarrow inv=-a.$$

Наравно, инверзни елементи било ког целог броја и сами су цели бројеви.

Значи да систем $\{\mathbb{Z},+\}$ *јесте* група.

(1.2) Нека су у скупу уређених парова реалних бројева $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ дефинисане две операције на следећи начин

- *сабирање уређених парова* као $(\xi_1,\xi_2)\oplus(\eta_1,\eta_2)=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2)$
- *множење уређених парова* као $(\xi_1,\xi_2)\odot(\eta_1,\eta_2)=(\xi_1\eta_1,\xi_2\eta_2)$,

где се у заградама обављају операције уобичајеног сабирања и множења у скупу реалних бројева. Да ли је систем $\{\mathbb{R}\times\mathbb{R},\oplus,\odot\}$ *поље*?

Скуп $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ коме су придружене две бинарне операције $\{\mathbb{R}\times\mathbb{R},\oplus,\odot\}$ биће *поље* ако задовољава следеће услове

A. Систем $\{\mathbb{R}\times\mathbb{R},\oplus\}$ мора бити *Абелова група*, што значи да морају важити следеће особине бинарне операције $\oplus$.

A1. *затвореност*: $(\xi_1,\xi_2)\oplus(\eta_1,\eta_2)=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2)$, што значи да, ако су уређени парови $(\xi_1,\xi_2),(\eta_1,\eta_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, онда мора и резултујући уређени пар $(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

A2. *асоцијативност*: небитно је којим се редоследом сабирају три уређена пара

$$\begin{aligned}\big((\xi_1,\xi_2)\oplus(\mu_1,\mu_2)\big)\oplus(\eta_1,\eta_2)&=(\xi_1+\mu_1,\xi_2+\mu_2)\oplus(\eta_1,\eta_2)\\&=((\xi_1+\mu_1)+\eta_1,(\xi_2+\mu_2)+\eta_2)\\&=(\xi_1+(\mu_1+\eta_1),\xi_2+(\mu_2+\eta_2))\\&=(\xi_1,\xi_2)\oplus(\mu_1+\eta_1,\mu_2+\eta_2)\\&=(\xi_1,\xi_2)\oplus\big((\mu_1,\mu_2)\oplus(\eta_1,\eta_2)\big)\end{aligned}$$

Ова особина директна је последица важења асоцијативности уобичајеног сабирања реалних бројева.

A3. постоји *неутрални елемент* бинарне операције сабирања уређених парова

$$(\xi_1,\xi_2)\oplus(0,0)=(\xi_1+0,\xi_2+0)=(\xi_1,\xi_2),$$

$$(0,0)\oplus(\xi_1,\xi_2)=(0+\xi_1,0+\xi_2)=(\xi_1,\xi_2).$$

Ова особина директна је последица постојања неутралног (*нултог*) елемента код уобичајеног сабирања реалних бројева, што би била нула 0.

A4. такође постоје и *инверзни елементи* за сваки уређени пар из скупа $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$(\xi_1,\xi_2)\oplus(-\xi_1,-\xi_2)=(\xi_1+(-\xi_1),\xi_2+(-\xi_2))=(0,0),$$

$$(-\xi_1,-\xi_2)\oplus(\xi_1,\xi_2)=((-\xi_1)+\xi_1,(-\xi_2)+\xi_2)=(0,0).$$

A5. *комутативност*: небитно је којим се редоследом сабирају два уређена пара

$$(\mu_1,\mu_2)\oplus(\eta_1,\eta_2)=(\mu_1+\eta_1,\mu_2+\eta_2)=(\eta_1+\mu_1,\eta_2+\mu_2)=(\eta_1,\eta_2)\oplus(\mu_1,\mu_2).$$

Ова особина директна је последица важења комутативности уобичајеног сабирања реалних бројева.

Значи, систем $\{\mathbb{R}\times\mathbb{R},\oplus\}$ *јесте* Абелова група.

Б. Систем $\{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\},\odot\}$ мора бити *Абелова група*, што значи да морају важити следеће особине бинарне операције $\odot$.

Б1. *затвореност* $(\xi_1,\xi_2)\odot(\eta_1,\eta_2)=(\xi_1\eta_1,\xi_2\eta_2)$ није задовољена, будући да постоје уређени парови за које овај услов не важи, нпр.

$$(1,0)\odot(0,1)=(0,0).$$

Овако добијен уређени пар очигледно не припада систему $\{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\},\odot\}$.

Б2. *асоцијативност* важи

$$\begin{aligned}\big((\xi_1,\xi_2)\odot(\mu_1,\mu_2)\big)\odot(\eta_1,\eta_2)&=(\xi_1\mu_1,\xi_2\mu_2)\odot(\eta_1,\eta_2)\\&=((\xi_1\mu_1)\eta_1,(\xi_2\mu_2)\eta_2)\\&=(\xi_1(\mu_1\eta_1),\xi_2(\mu_2\eta_2))\\&=(\xi_1,\xi_2)\odot(\mu_1\eta_1,\mu_2\eta_2)\\&=(\xi_1,\xi_2)\odot\big((\mu_1,\mu_2)\odot(\eta_1,\eta_2)\big)\end{aligned}$$

Ова особина директна је последица важења асоцијативности уобичајеног множења реалних бројева.

Б3. постоји *неутрални елемент* бинарне операције множења уређених парова

$$(\mu_1,\mu_2)\odot(1,1)=(\mu_1\cdot 1,\mu_2\cdot 1)=(\mu_1,\mu_2),$$

$$(1,1)\odot(\mu_1,\mu_2)=(1\cdot\mu_1,1\cdot\mu_2)=(\mu_1,\mu_2).$$

Ова особина директна је последица постојања неутралног (*јединичног*) елемента код уобичајеног множења реалних бројева, што би била јединица 1.

Б4. такође постоје и *инверзни елементи* за сваки уређени пар из скупа $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$

$$(\xi_1,\xi_2)\odot(\xi_1^{-1},\xi_2^{-1})=(\xi_1\xi_1^{-1},\xi_2\xi_2^{-1})=(1,1),$$

$$(\xi_1^{-1},\xi_2^{-1})\odot(\xi_1,\xi_2)=(\xi_1^{-1}\xi_1,\xi_2^{-1}\xi_2)=(1,1).$$

Б5. *комутативност*: небитно је којим се редоследом множе два уређена пара

$$(\mu_1,\mu_2)\odot(\eta_1,\eta_2)=(\mu_1\eta_1,\mu_2\eta_2)=(\eta_1\mu_1,\eta_2\mu_2)=(\eta_1,\eta_2)\odot(\mu_1,\mu_2).$$

Ова особина директна је последица важења комутативности уобичајеног множења реалних бројева.

Значи, будући да бинарна операција $\odot$ *није затворена* у скупу $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$, систем $\{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\},\odot\}$ *није* Абелова група.

В. *дистрибутивност* бинарне операције множења уређених парова важи, јер

$$\begin{aligned}(\xi_1,\xi_2)\odot\big((\mu_1,\mu_2)\oplus(\eta_1,\eta_2)\big) &= (\xi_1,\xi_2)\odot(\mu_1+\eta_1,\mu_2+\eta_2)\\ &= (\xi_1(\mu_1+\eta_1),\xi_2(\mu_2+\eta_2))\\ &= (\xi_1\mu_1+\xi_1\eta_1,\xi_2\mu_2+\xi_2\eta_2)\\ &= (\xi_1\mu_1,\xi_2\mu_2)\oplus(\xi_1\eta_1,\xi_2\eta_2)\\ &= \big((\xi_1,\xi_2)\odot(\mu_1,\mu_2)\big)\oplus\big((\xi_1,\xi_2)\odot(\eta_1,\eta_2)\big)\end{aligned}$$

Ова особина директна је последица важења дистрибутивности множења реалних бројева у односу на сабирање реалних бројева.

Закључак: Систем $\{\mathbb{R}\times\mathbb{R},\oplus,\odot\}$ *није поље* будући да у њему постоје *делитељи нуле* - то су уређени парови различити од нултог елемента $(0,0)$ бинарне операције сабирања уре-ђених парова који, при бинарној операцији множења уређених парова, дају управо нулти елемент. Скуп $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *није затворен* у односу на множење уређених парова ако се из њега избаци нулти елемент $(0,0)$; с друге стране, ако он не би био избачен, онда *не би постојао инверзни елемент* за њега.

(1.3) Нека је $\{\mathbb{F},+,\cdot\}$ произвољно поље. Показати да је скуп уређених $n-$торки $\mathbb{F}^n$ из поља $\mathbb{F}$ векторски простор, ако је *сабирање вектора* дефинисано као

$$(\xi_1,\ldots,\xi_n)\oplus(\eta_1,\ldots,\eta_n)=(\xi_1+\eta_1,\ldots,\xi_n+\eta_n),$$

а *множење вектора скаларом* као

$$a\circ(\xi_1,\ldots,\xi_n)=(a\,\xi_1,\ldots,a\,\xi_n).$$

Скуп $\mathbb{F}^n$ у коме су дефинисане две конкретне бинарне операције: сабирање вектора и множење вектора скаларом (видети поставку задатка), тј. систем $\{\mathbb{F}^n,\oplus,\circ\}$ биће *линеарни векторски простор* ако задовољава следеће услове

A. Систем $\{\mathbb{F}^n,\oplus\}$ мора да има структуру *Абелове групе*, што значи да морају важити следеће особине бинарне операције сабирања вектора $\oplus$

A1. *затвореност* скупа $\mathbb{F}^n$ према сабирању вектора значи да збир уређених $n-$торки $(\xi_1,\ldots,\xi_n)\oplus(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ мора и сам бити $n-$торка $(\xi_1+\eta_1,\ldots,\xi_n+\eta_n)$, што је испуњено самом дефиницијом ове бинарне операције. Другачије речено, ако је један пар уређених $n-$торки $(\xi_1,\ldots,\xi_n),(\eta_1,\ldots,\eta_n)\in\mathbb{F}^n$, онда мора и резултујућа уређена $n-$торка $(\xi_1+\eta_1,\ldots,\xi_n+\eta_n)\in\mathbb{F}^n$.

A2. *асоцијативност*: небитно је којим се редоследом сабирају три уређене $n-$торке

$$\begin{aligned}\big((\xi_1,\ldots,\xi_n)\oplus(\mu_1,\ldots,\mu_n)\big)\oplus(\eta_1,\ldots,\eta_n)&=(\xi_1+\mu_1,\ldots,\xi_n+\mu_n)\oplus(\eta_1,\ldots,\eta_n)\\&=((\xi_1+\mu_1)+\eta_1,\ldots,(\xi_n+\mu_n)+\eta_n)\\&=(\xi_1+(\mu_1+\eta_1),\ldots,\xi_n+(\mu_n+\eta_n))\\&=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\oplus(\mu_1+\eta_1,\ldots,\mu_n+\eta_n)\\&=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\oplus\big((\mu_1,\ldots,\mu_n)\oplus(\eta_1,\ldots,\eta_n)\big)\end{aligned}$$

Ова особина директна је последица важења асоцијативности уобичајеног сабирања реалних бројева.

A3. мора постојати *неутрални елемент* бинарне операције сабирања уређених $n-$торки

$$(\xi_1,\ldots,\xi_n)\oplus(0,\ldots,0)=(\xi_1+0,\ldots,\xi_n+0)=(\xi_1,\ldots,\xi_n),$$

$$(0,\ldots,0)\oplus(\xi_1,\ldots,\xi_n)=(0+\xi_1,\ldots,0+\xi_n)=(\xi_1,\ldots,\xi_n).$$

Ова особина директна је последица постојања неутралног (*нултог*) елемента код уобичајеног сабирања реалних бројева, што би била, наравно, нула 0.

A4. такође морају да постоје и *инверзни елементи* за сваки уређени пар из скупа $\mathbb{F}^n$

$$(\xi_1,\ldots,\xi_n)\oplus(-\xi_1,\ldots,-\xi_n)=(\xi_1+(-\xi_1),\ldots,\xi_n+(-\xi_n))=(0,\ldots,0),$$

$$(-\xi_1,\ldots,-\xi_n)\oplus(\xi_1,\ldots,\xi_n)=((-\xi_1)+\xi_1,\ldots,(-\xi_n)+\xi_n)=(0,\ldots,0).$$

А5. *комутативност*: небитно је којим се редоследом сабирају две уређене $n-$торке

$$(\mu_1,\ldots,\mu_n)\oplus(\eta_1,\ldots,\eta_n)=(\mu_1+\eta_1,\ldots,\mu_n+\eta_n)=(\eta_1+\mu_1,\ldots,\eta_n+\mu_n)=(\eta_1,\ldots,\eta_n)\oplus(\mu_1,\ldots,\mu_n).$$

Ова особина директна је последица важења комутативности уобичајеног сабирања реалних бројева.

Значи, систем $\{\mathbb{F}^n,\oplus\}$ *јесте* Абелова група.

Б. Систем $\{\mathbb{F},+,\cdot\}$ мора имати структуру *поља*, што је у поставци задатка и претпостављено.

В. Мора важити особина *асоцијативности* множења скаларом, што би значило да је свеједно множи ли се уређена $n-$торка прво једним, а потом другим скаларом или се прво помноже скалари (што је лакше) па тек онда помножити $n-$торку тако добијеним производом скалара

$$\begin{aligned} a\circ\big(b\circ(\mu_1,\ldots,\mu_n)\big)&=a\circ(b\,\mu_1,\ldots,b\,\mu_n)\\ &=(a\,(b\,\mu_1),\ldots,a\,(b\,\mu_n))\\ &=((a\,b)\,\mu_1,\ldots,(a\,b)\,\mu_n)\\ &=(a\,b)\circ(\mu_1,\ldots,\mu_n)\end{aligned}$$

Ова особина директна је последица важења асоцијативности множења три скалара (свеједно да ли они припадају скупу реалних $\mathbb{R}$ или комплексних $\mathbb{C}$ бројева).

Следеће две особине тичу се међусобног односа задате две конкретне бинарне операције, сабирања вектора и множења вектора скаларом.

Г. Мора важити *дистрибутивност* множења једним скаларом збира два вектора (две уређене $n-$торке)

$$\begin{aligned} c\circ\big((\mu_1,\ldots,\mu_n)\oplus(\eta_1,\ldots,\eta_n)\big)&=c\circ(\mu_1+\eta_1,\ldots,\mu_n+\eta_n)\\ &=(c\,(\mu_1+\eta_1),\ldots,c\,(\mu_n+\eta_n))\\ &=(c\,\mu_1+c\,\eta_1,\ldots,c\,\mu_n+c\,\eta_n)\\ &=(c\,\mu_1,\ldots,c\,\mu_n)\oplus(c\,\eta_1,\ldots,c\,\eta_n)\\ &=c\circ(\mu_1,\ldots,\mu_n)\,\oplus\,c\circ(\eta_1,\ldots,\eta_n)\end{aligned}$$

Ова особина директна је последица важења дистрибутивности множења једним скаларом збира два скалара (свеједно да ли они припадају скупу реалних $\mathbb{R}$ или комплексних $\mathbb{C}$ бројева).

Д. Мора важити *дистрибутивност* множења збиром два скалара једног вектора (уређене $n-$торке)

$$\begin{aligned}(c+d)\circ(\xi_1,\ldots,\xi_n)&=((c+d)\,\xi_1,\ldots,(c+d)\,\xi_n)=(c\,\xi_1+d\,\xi_1,\ldots,c\,\xi_n+d\,\xi_n)\\ &=(c\,\xi_1,\ldots,c\,\xi_n)\oplus(d\,\xi_1,\ldots,d\,\xi_n)=c\circ(\xi_1,\ldots,\xi_n)\,\oplus\,d\circ(\xi_1,\ldots,\xi_n)\end{aligned}$$

Ова особина директна је последица важења дистрибутивности множења збиром два скалара трећег скалара (свеједно да ли они припадају скупу реалних $\mathbb{R}$ или комплексних $\mathbb{C}$ бројева).

Ђ. Последња особина која мора важити јесте да јединични елемент поља $\mathbb{F}$ (што је неутрални елемент операције обичног множења, значи скалар 1) мора истовремено бити и *јединични елемент* бинарне операције множења вектора (уређене $n-$торке) скаларом

$$1\circ(\mu_1,\ldots,\mu_n)=(1\cdot\mu_1,\ldots,1\cdot\mu_n)=(\mu_1,\ldots,\mu_n)\,.$$

Ова особина директна је последица постојања неутралног (*јединичног*) елемента код уобичајеног множења било реалних било комплексних бројева, што је, наравно, јединица 1.

Значи, будући да су све побројане особине задовољене, систем $\left\{\mathbb{F}^n,\oplus,\circ\right\}$ *јесте* ЛВП (линеарни векторски простор).

(1.4) У скупу $\mathbb{R}^+$ позитивних реалних бројева дефинисане су операције *сабирања* (као множење у скупу реалних бројева)

$$v_1 \oplus v_2 = v_1 \cdot v_2 ,$$

и *множење скаларом* (као степеновање)

$$\alpha \circ v = v^\alpha .$$

Да ли се систем $\{\mathbb{R}^+, \oplus, \circ\}$ може сматрати за *линеарни векторски простор* над пољем реалних бројева?

Систем $\{\mathbb{R}^+, \oplus, \circ\}$ биће *линеарни векторски простор* ако задовољава следеће услове:

А. Систем $\{\mathbb{R}^+, \oplus\}$ мора да има структуру *Абелове групе*, што значи да морају важити следеће особине бинарне операције сабирања вектора $\oplus$

А1. *затвореност* скупа $\mathbb{R}^+$ према сабирању вектора значи да збир $v_1 \oplus v_2$ два позитивна реална броја $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^+$, мора и сам бити позитиван реалан број, што је испуњено самом дефиницијом ове бинарне операције по којој је поменути збир уствари једнак уобичајеном множењу бројева v_1 и v_2. Наравно, производ два позитивна реална броја $v_1 \cdot v_2$ не може бити ништа друго до позитиван реалан број.

А2. *асоцијативност* значи да је небитно којим се редоследом сабирају три позитивна реална броја

$$(v_1 \oplus v_2) \oplus v_3 = (v_1 \cdot v_2) \oplus v_3 = (v_1 \cdot v_2) \cdot v_3 = v_1 \cdot (v_2 \cdot v_3) = v_1 \cdot (v_2 \oplus v_3) = v_1 \oplus (v_2 \oplus v_3) .$$

Ова особина директна је последица важења асоцијативности уобичајеног сабирања позитивних реалних бројева.

А3. Мора постојати *неутрални елемент* бинарне операције сабирања позитивних реалних бројева

$$v \oplus 1 = v \cdot 1 = v , \quad 1 \oplus v = 1 \cdot v = v .$$

Ова особина директна је последица постојања неутралног (*јединичног*) елемента код уобичајеног множења позитивних реалних бројева, што би била, наравно, јединица 1.

А4. Такође мора да постоји *инверзни елемент* за сваки позитивни реални број из скупа $\mathbb{R}^+$

$$v \oplus v^{-1} = v \cdot v^{-1} = v^0 = 1, \quad v^{-1} \oplus v = v^{-1} \cdot v = v^0 = 1.$$

А5. *Комутативност* значи да није битно којим се редоследом сабирају два позитивна реална броја

$$v_1 \oplus v_2 = v_1 \cdot v_2 = v_2 \cdot v_1 = v_2 \oplus v_1 .$$

Ово директно следи јер је уобичајено сабирање позитивних реалних бројева комутативно.

Значи, систем $\{\mathbb{R}^+, \oplus\}$ *јесте* Абелова група.

Б. Систем $\{\mathbb{R}, +, \cdot\}$ треба да има структуру *поља*, што је у поставци задатка и речено.

В. Мора важити особина *асоцијативности* множења скаларом, што би значило да је свеједно множи ли се позитивни реални број прво једним, па другим скаларом или се прво помноже скалари (што је лакше) па тек онда помножити позитивни реални број тако добијеним производом скалара

$$\alpha \circ (\beta \circ v) = \alpha \circ v^{\beta} = (v^{\beta})^{\alpha} = v^{\beta \cdot \alpha} = v^{\alpha \cdot \beta} = (\alpha \cdot \beta) \circ v .$$

Ова особина директна је последица важења комутативности множења два реална броја у степену експонента.

Следеће две особине тичу се међусобног односа задате две конкретне бинарне операције, сабирања вектора и множења вектора скаларом.

Г. Мора важити *дистрибутивност* множења једним скаларом збира два позитивна реална броја

$$\gamma \circ (v_1 \oplus v_2) = \gamma \circ (v_1 \cdot v_2) = (v_1 \cdot v_2)^{\gamma} = v_1^{\gamma} \cdot v_2^{\gamma} = v_1^{\gamma} \oplus v_2^{\gamma} = \gamma \circ v_1 \oplus \gamma \circ v_2 .$$

Ова особина директно следи из правила степеновања реалним бројем производа позитивних реалних бројева.

Д. Мора важити *дистрибутивност* множења збиром два скалара једног позитивног реалног броја

$$(\beta + \gamma) \circ v = v^{\beta + \gamma} = v^{\beta} \cdot v^{\gamma} = v^{\beta} \oplus v^{\gamma} = \beta \circ v \oplus \gamma \circ v .$$

Ова особина директно следи из правила степеновања позитивног реалног броја збиром два реална броја.

Ђ. Последња особина која мора важити јесте да јединични елемент поља $\mathbb{R}$ (што је неутрални елемент операције обичног множења, значи скалар 1) мора истовремено бити и *јединични елемент* бинарне операције множења позитивног реалног броја скаларом

$$1 \circ v = v^1 = v .$$

Ова особина директна је последица чињенице да било који позитивни реални број степенован јединицом остаје непромењен.

Значи, будући да су све побројане особине задовољене, систем $\{\mathbb{R}^+, \oplus, \circ\}$ *јесте* ЛВП (линеарни векторски простор).

(1.5) Испитати да ли је структура $\mathbb{V}(\mathbb{F})$ векторски простор, ако су операције $\oplus$ сабирање вектора, $\circ$ множење вектора скаларом дате као:

(а) $\mathbb{V} = \mathbb{F}^{mn}$ (скуп матрица реда $m \times n$, са матричним елементима из $\mathbb{F}$),
$\oplus$ сабирање матрица, $\circ$ множење матрице скаларом,
поље је произвољно, значи $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{F} = \mathbb{C}$;

(б) $\mathbb{V} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
$(\alpha, \beta) \oplus (\gamma, \delta) = (\alpha + \beta, \gamma + \delta)$ - у загради је уобичајено сабирање реалних бројева,
$c \circ (\alpha, \beta) = (c\alpha, \beta)$ - у загради је уобичајено множење реалних бројева,
поље је $\mathbb{F} = \mathbb{R}$;

(в) $\mathbb{V} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
$(\alpha, \beta) \oplus (\gamma, \delta) = (\alpha + \beta, \gamma + \delta)$ - у загради је уобичајено сабирање реалних бројева,
$c \circ (\alpha, \beta) = (c^2\alpha, c^2\beta)$ - у загради је уобичајено множење реалних бројева,
поље је $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

(а) Да би скуп $\mathbb{F}^{mn}(\mathbb{F})$ био *линеарни векторски простор* морају, као и раније, бити испуњени следећи услови:

А. Систем $\{\mathbb{F}^{mn}, \oplus\}$ мора да има структуру *Абелове групе*, што значи да морају важити следеће особине бинарне операције сабирања матрица $\oplus$

А1. *затвореност* скупа $\mathbb{F}^{mn}$ према сабирању матрица значи да збир две матрице истог реда $[a]_{m\times n}, [b]_{m\times n} \in \mathbb{F}^{mn}$, мора и сам бити матрица истог реда и типа, илити

$$[a_{ij}]_{m\times n} \oplus [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n} = [c_{ij}]_{m\times n} \in \mathbb{F}^{mn},$$

што је испуњено самом чињеницом да су матрични елементи c_{ij} резултујуће матрице једнаки уобичајеном збиру $a_{ij} + b_{ij}$ било два реална, било два комплексна матрична елемента полазних матрица.

А2. *асоцијативност* значи да је небитно којим се редоследом сабирају три матрице истог реда и типа

$$\begin{aligned}
\left([a_{ij}]_{m\times n} \oplus [b_{ij}]_{m\times n}\right) \oplus [c_{ij}]_{m\times n} &= [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n} \oplus [c_{ij}]_{m\times n} = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]_{m\times n} \\
&= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n} \oplus [b_{ij} + c_{ij}]_{m\times n} \\
&= [a_{ij}]_{m\times n} \oplus \left([b_{ij}]_{m\times n} \oplus [c_{ij}]_{m\times n}\right)
\end{aligned}$$

Ова особина директна је последица важења асоцијативности уобичајеног сабирања било реалних било комплексних бројева.

А3. Мора постојати *неутрални елемент* бинарне операције сабирања матрица истог реда и типа

$$[a_{ij}]_{m\times n} \oplus [0]_{m\times n} = [a_{ij} + 0]_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n},$$

$$[0]_{m\times n} \oplus [a_{ij}]_{m\times n} = [0 + a_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}.$$

Ова особина директна је последица постојања неутралног (*нултог*) елемента код уобичајеног сабирања било реалних било комплексних бројева. Значи да је услов испуњен јер је неутрални (*нулти*) елемент бинарне операције сабирања матрица истог реда и типа уствари *нулта матрица*

$$[0]_{m\times n} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}.$$

А4. Такође мора постојати *инверзни елемент* за сваку матрицу из скупа $\mathbb{F}^{mn}$

$$[a_{ij}]_{m\times n} \oplus [-a_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} - a_{ij}]_{m\times n} = [0]_{m\times n},$$

$$[-a_{ij}]_{m\times n} \oplus [a_{ij}]_{m\times n} = [-a_{ij} + a_{ij}]_{m\times n} = [0]_{m\times n}.$$

Ова особина директна је последица чињенице да постоји број супротног предзнака код уобичајеног сабирања било реалних било комплексних бројева. Значи да је услов испуњен јер је инверзни елемент бинарне операције сабирања матрица истог реда и типа уствари *матрица супротног предзнака* од полазне.

А5. *Комутативност* значи да није битно којим се редоследом сабирају две матрице истог реда и типа

$$[a_{ij}]_{m\times n} \oplus [d_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} + d_{ij}]_{m\times n} = [d_{ij} + a_{ij}]_{m\times n} = [d_{ij}]_{m\times n} \oplus [a_{ij}]_{m\times n}.$$

Ова особина директна је последица важења комутативности уобичајеног сабирања било два реална било два комплексна броја.

Значи да систем $\{\mathbb{F}^{mn}, \oplus\}$ *јесте* Абелова група.

Б. Систем $\{\mathbb{F}, +, \cdot\}$ треба да има структуру *поља*, што је у поставци задатка и речено.

В. Мора важити особина *асоцијативности* множења скаларом, што би значило да је свеједно множи ли се матрица прво једним, па другим скаларом или се прво помноже скалари (што је лакше) па се тек онда матрица помножи тако добијеним производом скалара

$$\alpha \circ \left(\beta \circ [c_{ij}]_{m\times n}\right) = \alpha \circ [\beta\, c_{ij}]_{m\times n} = [\alpha\,(\beta\, c_{ij})]_{m\times n} = [(\alpha\,\beta)\, c_{ij}]_{m\times n} = (\alpha\,\beta) \circ [c_{ij}]_{m\times n}.$$

Ова особина директна је последица важења комутативности множења два реална или комплексна броја.

Следеће две особине тичу се међусобног односа задате две конкретне бинарне операције, сабирања вектора и множења вектора скаларом.

Г. Мора важити *дистрибутивност* множења једним скаларом збира две матрице истог реда и типа

$$\gamma \circ \left([a_{ij}]_{m\times n} \oplus [b_{ij}]_{m\times n}\right) = \gamma \circ [a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n} = [\gamma(a_{ij}+b_{ij})]_{m\times n} = [\gamma\, a_{ij} + \gamma\, b_{ij}]_{m\times n}$$
$$= [\gamma\, a_{ij}]_{m\times n} \oplus [\gamma\, b_{ij}]_{m\times n} = \gamma \circ [a_{ij}]_{m\times n} \oplus \gamma \circ [b_{ij}]_{m\times n}$$

Ова особина директно следи из дистрибутивности множења збира два (било реална било комплексна) броја једним (било реалним било комплексним) скаларом.

Д. Мора важити *дистрибутивност* множења збиром два скалара једног позитивног реалног броја

$$(\alpha+\beta)\circ [d_{ij}]_{m\times n} = [(\alpha+\beta)\, d_{ij}]_{m\times n} = [\alpha\, d_{ij} + \beta\, d_{ij}]_{m\times n}$$
$$= [\alpha\, d_{ij}]_{m\times n} \oplus [\beta\, d_{ij}]_{m\times n} = \alpha \circ [d_{ij}]_{m\times n} \oplus \beta \circ [d_{ij}]_{m\times n}$$

Ова особина директно следи из дистрибутивности множења збиром два (било реална било комплексна) скалара једног (било реалног било комплексног) броја.

Ђ. Последња особина која мора важити јесте да јединични елемент поља $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (што је неутрални елемент операције обичног множења, значи скалар 1) мора истовремено бити и *јединични елемент* бинарне операције множења матрице скаларом

$$1 \circ [b_{ij}]_{m\times n} = [1\cdot b_{ij}]_{m\times n} = [b_{ij}]_{m\times n}.$$

Ова особина директна је последица чињенице да било који реални или комплексни број помножен јединицом остаје непромењен.

Значи, будући да су све побројане особине задовољене, систем $\left\{\mathbb{F}^{mn}, \oplus, \circ\right\}$ *јесте* ЛВП (линеарни векторски простор).

* * *

(б) Да би скуп $\mathbb{R}\times\mathbb{R}(\mathbb{R})$ био *линеарни векторски простор* мора важити следеће:

А. Систем $\{\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \oplus\}$ мора имати структуру *Абелове групе*, што значи да морају важити следеће особине бинарне операције сабирања вектора (оријентисаних дужи) $\oplus$

А1. *затвореност* скупа $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ према сабирању вектора значи да збир два вектора (ξ_1, ξ_2), $(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ мора и сам бити вектор из истог простора

$$(\xi_1, \xi_2) \oplus (\eta_1, \eta_2) = (\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},$$

што је испуњено самом чињеницом да су компоненте резултујућег вектора $\xi_1+\eta_1$ и $\xi_2+\eta_2$ збирови компоненти првог и другог вектора, а будући да су ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 реални бројеви, самим тим су и поменуте компоненте резултујућег вектора такође реални бројеви.

А2. *асоцијативност* значи да је небитно којим се редоследом сабирају три вектора

$$\begin{aligned}\big((\xi_1,\xi_2)\oplus(\eta_1,\eta_2)\big)\oplus(\mu_1,\mu_2) &= (\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2)\oplus(\mu_1,\mu_2)\\ &= ((\xi_1+\eta_1)+\mu_1,(\xi_2+\eta_2)+\mu_2)\\ &= (\xi_1+(\eta_1+\mu_1),\xi_2+(\eta_2+\mu_2))\\ &= (\xi_1,\xi_2)\oplus(\eta_1+\mu_1,\eta_2+\mu_2)\\ &= (\xi_1,\xi_2)\oplus\big((\eta_1,\eta_2)\oplus(\mu_1,\mu_2)\big)\end{aligned}$$

Ова особина директна је последица важења асоцијативности уобичајеног сабирања реалних бројева.

А3. Мора постојати *неутрални елемент* бинарне операције сабирања вектора

$$(\mu_1,\mu_2)\oplus(0,0)=(\mu_1+0,\mu_2+0)=(\mu_1,\mu_2),$$

$$(0,0)\oplus(\mu_1,\mu_2)=(0+\mu_1,0+\mu_2)=(\mu_1,\mu_2).$$

Ова особина директна је последица постојања неутралног (*нултог*) елемента код уобичајеног сабирања реалних бројева. Значи да је услов испуњен јер је неутрални (*нулти*) елемент бинарне операције сабирања матрица истог реда и типа уствари *нулти вектор* $(0,0)$.

А4. Такође мора постојати *инверзни елемент* за сваки вектор из $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$(\eta_1,\eta_2)\oplus(-\eta_1,-\eta_2)=(\eta_1-\eta_1,\eta_2-\eta_2)=(0,0),$$

$$(-\eta_1,-\eta_2)\oplus(\eta_1,\eta_2)=(-\eta_1+\eta_1,-\eta_2+\eta_2)=(0,0).$$

Ова особина директна је последица чињенице да постоји број супротног предзнака код уобичајеног сабирања реалних бројева. Значи да је услов испуњен јер је инверзни елемент бинарне операције сабирања вектора уствари *вектор супротног предзнака* полазном, односно оријентисана дуж супротно усмерена од полазне.

А5. *Комутативност* значи да није битно којим се редоследом сабирају два вектора

$$(\mu_1,\mu_2)\oplus(\xi_1,\xi_2)=(\mu_1+\xi_1,\mu_2+\xi_2)=(\xi_1+\mu_1,\xi_2+\mu_2)=(\xi_1,\xi_2)\oplus(\mu_1,\mu_2).$$

Ова особина директна је последица важења комутативности уобичајеног сабирања два реална броја.

Значи да систем $\{\mathbb{R}\times\mathbb{R},\oplus\}$ *јесте* Абелова група.

Б. Систем $\{\mathbb{R},+,\cdot\}$ треба да има структуру *поља*, а скуп реалних бројева $\mathbb{R}$ и јесте поље у односу на бинарне операције уобичајеног сабирања и множења.

В. Мора важити особина *асоцијативности* множења вектора скаларом, што значи да је свеједно множи ли се вектор прво једним, па другим скаларом или се прво помноже скалари (што је лакше) па се тек онда вектор помножи тако добијеним производом скалара

$$a\circ\big(b\circ(\xi_1,\xi_2)\big)=a\circ(b\,\xi_1,\xi_2)=(a\,(b\,\xi_1),\xi_2)=((a\,b)\,\xi_1,\xi_2)=(a\,b)\circ(\xi_1,\xi_2).$$

Ова особина директна је последица важења асоцијативности множења три реална броја.

Следеће две особине тичу се међусобног односа задате две конкретне бинарне операције, сабирања вектора и множења вектора скаларом.

Г. Мора важити *дистрибутивност* множења једним скаларом збира два вектора

$$\begin{aligned} c\circ\big((\mu_1,\mu_2)\oplus(\eta_1,\eta_2)\big) &= c\circ(\mu_1+\eta_1,\mu_2+\eta_2) \\ &= (c\,(\mu_1+\eta_1),\mu_2+\eta_2) = (c\,\mu_1+c\,\eta_1,\mu_2+\eta_2) \\ &= (c\,\mu_1,\mu_2)\oplus(c\,\eta_1,\eta_2) = c\circ(\mu_1,\mu_2)\oplus c\circ(\eta_1,\eta_2) \end{aligned}$$

Ова особина директно следи из дистрибутивности множења збира два реална броја једним реалним скаларом.

Д. Мора важити *дистрибутивност* множења збиром два скалара једног позитивног реалног броја

$$\begin{aligned} (a+b)(\xi_1,\xi_2) &= ((a+b)\,\xi_1,\xi_2) \\ &= (a\,\xi_1+b\,\xi_1,\xi_2+0) \\ &= (a\,\xi_1,\xi_2)\oplus(b\,\xi_1,0) \\ &= a\circ(\xi_1,\xi_2)\oplus b\circ(\xi_1,0) \\ &\neq a\circ(\xi_1,\xi_2)\oplus b\circ(\xi_1,\xi_2) \end{aligned}$$

Очигледно је да ова особина није задовољена.

Ђ. Последња особина која мора важити јесте да јединични елемент поља $\mathbb{R}$ (што је неутрални елемент операције обичног множења, значи скалар 1) мора истовремено бити и *јединични елемент* бинарне операције множења вектора скаларом

$$1\circ(\mu_1,\mu_2) = (1\cdot\mu_1, 1\cdot\mu_2) = (\mu_1,\mu_2)\,.$$

Ова особина директна је последица чињенице да било који реални број помножен јединицом остаје непромењен.

Пошто нису задовољене све потребне особине, систем $\{\mathbb{R}\times\mathbb{R},\oplus,\circ\}$ *није* ЛВП (линеарни векторски простор).

* * *

(в) Да би скуп $\mathbb{R}\times\mathbb{R}(\mathbb{R})$ био *линеарни векторски простор* морају, наравно, бити испуњени следећи услови:

А. Систем $\{\mathbb{R}\times\mathbb{R},\oplus\}$ јесте *Абелова група*, пошто је дефиниција сабирања вектора иста као у проблему (б) и проверена је тамо.

Б. Систем $\{\mathbb{R},+,\cdot\}$ јесте *поље*, пошто је скуп реалних бројева $\mathbb{R}$ поље у односу на бинарне операције обичног сабирања и множења.

В. Особина *асоцијативности* множења скаларом важи, јер

$$\begin{aligned} a\circ\big(b\circ(\xi_1,\xi_2)\big) &= a\circ(b^2\xi_1,b^2\xi_2) = (a^2(b^2\xi_1),a^2(b^2\xi_2)) = ((a^2b^2)\xi_1,(a^2b^2)\xi_2) \\ &= ((a\,b)^2\,\xi_1,(a\,b)^2\,\xi_2) = (a\,b)\circ(\xi_1,\xi_2) \end{aligned}$$

Ова особина директна је последица важења асоцијативности множења три реална броја.

Следеће две особине тичу се међусобног односа задате две конкретне бинарне операције, сабирања вектора и множења вектора скаларом.

Г. *Дистрибутивност* множења једним скаларом збира два вектора важи, пошто

$$\begin{aligned} c\circ\big((\mu_1,\mu_2)\oplus(\eta_1,\eta_2)\big) &= c\circ(\mu_1+\eta_1,\mu_2+\eta_2) \\ &= (c^2(\mu_1+\eta_1),c^2(\mu_2+\eta_2)) = (c^2\mu_1+c^2\eta_1,c^2\mu_2+c^2\eta_2) \\ &= (c^2\mu_1,c^2\mu_2)\oplus(c^2\eta_1,c^2\eta_2) = c\circ(\mu_1,\mu_2)\oplus c\circ(\eta_1,\eta_2) \end{aligned}$$

Ова особина директно следи из дистрибутивности множења збира два реална броја једним реалним скаларом.

Д. Нажалост, *дистрибутивност* множења збиром два скалара једног позитивног реалног броја **не важи**

$$\begin{aligned} (a+b)(\xi_1,\xi_2) &= ((a+b)^2\xi_1,(a+b)^2\xi_2) = ((a^2+2ab+b^2)\xi_1,(a^2+2ab+b^2)\xi_2) \\ &= (a^2\xi_1+2ab\,\xi_1+b^2\xi_1,a^2\xi_2+2ab\,\xi_2+b^2\xi_2) \\ &= ((a^2\xi_1+b^2\xi_1)+2ab\,\xi_1,(a^2\xi_2+b^2\xi_2)+2ab\,\xi_2) \\ &= (a^2\xi_1+b^2\xi_1,a^2\xi_2+b^2\xi_2)\oplus(2ab\,\xi_1,2ab\,\xi_2) \\ &= (a^2\xi_1,a^2\xi_2)\oplus(b^2\xi_1,b^2\xi_2)\oplus(2ab\,\xi_1,2ab\,\xi_2) \\ &= a\circ(\xi_1,\xi_2)\oplus b\circ(\xi_1,\xi_2)\oplus\sqrt{2ab}\circ(\xi_1,\xi_2) \end{aligned}$$

Разлог је у црвеном трећем члану који је вишак, у супротном би ова особина била испуњена.

Ђ. Последња особина важи јер јединични елемент поља $\mathbb{R}$ (што је неутрални елемент операције обичног множења, значи скалар 1) јесте и *јединични елемент* бинарне операције множења вектора скаларом

$$1\circ(\mu_1,\mu_2) = (1^2\cdot\mu_1,1^2\cdot\mu_2) = (1\cdot\mu_1,1\cdot\mu_2) = (\mu_1,\mu_2)\,.$$

Ова особина директна је последица чињенице да се јединица не може степеновати.

Пошто нису задовољене све потребне особине, систем $\{\mathbb{R}\times\mathbb{R},\oplus,\circ\}$ *није* ЛВП (линеарни векторски простор).

(1.6) Испитати да ли следећи скупови функција реалне промењљиве чине векторски простор над $\mathbb{R}$, ако су операције *сабирања функција* и *множења функција скаларом* дефинисане на уобичајени начин

(а) скуп функција $f(t)=\alpha+\ln(t^2+1)$ за различите вредности α;

(б) скуп функција $f(t)=\alpha\ln(t^2+1)$ за различите вредности α.

(а) Да би скуп $\mathbb{V}_f$ функција $f(t)=\alpha+\ln(t^2+1)$ био *линеарни векторски простор* морају, прво, бити дефинисане следеће бинарне операције

- сабирање функција као $f_1(t)\oplus f_2(t)=\alpha_1+\ln(t^2+1)+\alpha_2+\ln(t^2+1)$,
- множење функције скаларом као $c\circ f(t)=c\,\alpha+c\ln(t^2+1)$,

а потом и бити испуњени следећи услови:

А. Скуп функција $\mathbb{V}_f$ мора имати структуру *Абелове групе*, у односу на горе дефинисану бинарну операцију сабирања функција $\oplus$:

А1. *затвореност* скупа функција према сабирању функција значи да збир две функције скупа мора давати трећу функцију из истог скупа функција, то јест, ако функције $f_1(t)$, $f_2(t)$ припадају $\mathbb{V}_f$, онда и

$$f_1(t)\oplus f_2(t)=\alpha_1+\ln(t^2+1)+\alpha_2+\ln(t^2+1)\in\mathbb{V}_f\,,$$

што је очигледно испуњено.

А2. *асоцијативност* значи да је небитно којим се редоследом сабирају три функције из датог скупа функција

$$\begin{aligned}f_1(t)\oplus\big(f_2(t)\oplus f_3(t)\big)&=f_1(t)\oplus\big(\alpha_2+\ln(t^2+1)+\alpha_3+\ln(t^2+1)\big)\\&=\alpha_1+\ln(t^2+1)+\big(\alpha_2+\ln(t^2+1)+\alpha_3+\ln(t^2+1)\big)\\&=\big(\alpha_1+\ln(t^2+1)+\alpha_2+\ln(t^2+1)\big)+\alpha_3+\ln(t^2+1)\\&=\big(\alpha_1+\ln(t^2+1)+\alpha_2+\ln(t^2+1)\big)\oplus f_3(t)=\big(f_1(t)\oplus f_2(t)\big)\oplus f_3(t)\end{aligned}$$

Ова особина директна је последица важења асоцијативности уобичајеног сабирања реалних бројева (логаритам натуралис је такође реалан број).

А3. Мора постојати *неутрални елемент* бинарне операције сабирања функција

$$f(t)\oplus f_0(t)=\alpha+\ln(t^2+1)+0=\alpha+\ln(t^2+1)=f(t)\,,$$

$$f_0(t)\oplus f(t)=0+\alpha+\ln(t^2+1)=\alpha+\ln(t^2+1)=f(t)\,.$$

У горе наведеном скупу функција није било неутралног елемента те $\mathbb{V}_f$ није био Абелова група у односу на сабирање функција, а самим тим ни ЛВП. Стога ће њему бити додата нулта функција

$$f_0(t) = 0$$

чиме је услов А3 испуњен. Сада се наставља са испитивањем преосталих услова.

А4. Такође мора постојати *инверзни елемент* за сваку функцију из скупа $\mathbb{V}_f$

$$f(t) \oplus \big(-f(t)\big) = \alpha + \ln(t^2+1) - \alpha - \ln(t^2+1) = 0 = f_0(t)\,,$$

$$\big(-f(t)\big) \oplus f(t) = -\alpha - \ln(t^2+1) + \alpha + \ln(t^2+1) = 0 = f_0(t)\,.$$

Ова особина директна је последица чињенице да постоји број супротног предзнака код уобичајеног сабирања реалних бројева, чак и када се ради о логаритму натуралис.

А5. *Комутативност* значи да није битно којим се редоследом сабирају две функције из скупа $\mathbb{V}_f$

$$f_1(t) \oplus f_2(t) = \alpha_1 + \ln(t^2+1) + \alpha_2 + \ln(t^2+1) = \alpha_2 + \ln(t^2+1) + \alpha_1 + \ln(t^2+1) = f_2(t) \oplus f_1(t)\,.$$

Ова особина директна је последица важења комутативности уобичајеног сабирања два реална броја, чак и када је реч о логаритму натуралис.

Значи да систем $\{\mathbb{V}_f, \oplus\}$ *јесте* Абелова група.

Б. Скуп реалних бројева $\mathbb{R}$ јесте *поље* у односу на уобичајено сабирање реалних бројева и множење истих скаларом.

В. *Асоцијативност* множења скаларом значи да је свеједно множи ли се функција прво једним, па другим скаларом или се прво помноже скалари (што је лакше) па се тек онда функција помножи тако добијеним производом скалара

$$\begin{aligned} b \circ \big(c \circ f(t)\big) &= b \circ \big(c\,\alpha + c\ln(t^2+1)\big) \\ &= b\,(c\,\alpha) + b\,(c\ln(t^2+1)) \\ &= (b\,c)\,\alpha + (b\,c)\ln(t^2+1) \\ &= (b\,c) \circ \big(\alpha + \ln(t^2+1)\big) = (b\,c) \circ f(t) \end{aligned}$$

Ова особина директна је последица важења комутативности множења три реална броја, па били они и логаритам натуралис.

Следеће две особине тичу се међусобног односа задате две конкретне бинарне операције, сабирања функција и множења функције скаларом.

Г. Мора важити *дистрибутивност* множења једним скаларом збира две функције из $\mathbb{V}_f$

$$\begin{aligned} b\circ\big(f_2(t)\oplus f_3(t)\big) &= b\circ\big(\alpha_2+\ln(t^2+1)+\alpha_3+\ln(t^2+1)\big)\\ &= b\alpha_2+b\ln(t^2+1)+b\alpha_3+b\ln(t^2+1)\\ &= b\circ\big(\alpha_2+\ln(t^2+1)\big)\oplus b\circ\big(\alpha_3+\ln(t^2+1)\big)\\ &= b\circ f_2(t)\oplus b\circ f_3(t)\end{aligned}$$

Ова особина директно следи из дистрибутивности множења збира два реална броја једним реалним скаларом.

Д. Мора важити *дистрибутивност* множења збиром два скалара једне функције из $\mathbb{V}_f$

$$\begin{aligned}(c+d)\circ f(t) &= (c+d)\alpha+(c+d)\ln(t^2+1)\\ &= c\alpha+d\alpha+c\ln(t^2+1)+d\ln(t^2+1)\\ &= c\alpha+c\ln(t^2+1)+d\alpha+d\ln(t^2+1)\\ &= c\big(\alpha+\ln(t^2+1)\big)+d\big(\alpha+\ln(t^2+1)\big)\\ &= c\circ f(t)\oplus d\circ f(t)\end{aligned}$$

Ова особина директно следи из дистрибутивности множења збиром два реална скалара једног реалног броја.

Ђ. Такође јединични елемент поља $\mathbb{R}$ (што је неутрални елемент операције обичног множења, значи скалар 1) мора истовремено бити и *јединични елемент* бинарне операције множења функције из скупа $\mathbb{V}_f$ скаларом

$$1\circ f(t)=1\cdot\alpha+1\cdot\ln(t^2+1)=\alpha+\ln(t^2+1)=f(t)\,.$$

Ова особина директна је последица чињенице да било који реални број помножен јединицом остаје непромењен, па био он и логаритам натуралис.

Значи, будући да су све побројане особине задовољене, систем $\{\mathbb{V}_f,\oplus,\circ\}$ *јесте* ЛВП (линеарни векторски простор), наравно, ако му се дода нулта функција $f_0(t)=0$.

*   *   *

(б) Да би скуп $\mathbb{V}_f$ функција $f(t)=\alpha\ln(t^2+1)$ био *линеарни векторски простор* морају, прво, бити дефинисане следеће бинарне операције

- сабирање функција као $f_1(t)\oplus f_2(t)=\alpha_1\ln(t^2+1)+\alpha_2\ln(t^2+1)$,
- множење функције скаларом као $c\circ f(t)=c\,\alpha\ln(t^2+1)$,

а потом и бити испуњени следећи услови:

А. Скуп функција $\mathbb{V}_f$ мора имати структуру *Абелове групе*, у односу на горе дефинисану бинарну операцију сабирања функција $\oplus$:

А1. *затвореност* скупа функција према сабирању функција значи да збир две функције скупа мора давати трећу функцију из истог скупа функција, то јест, ако функције $f_1(t)$, $f_2(t)$ припадају $\mathbb{V}_f$, онда и

$$
\begin{aligned}
f_1(t) \oplus f_2(t) &= \alpha_1 \ln(t^2+1) + \alpha_2 \ln(t^2+1) = \ln(t^2+1)^{\alpha_1} + \ln(t^2+1)^{\alpha_2} \\
&= \ln\left[(t^2+1)^{\alpha_1}(t^2+1)^{\alpha_2}\right] = \ln\left[(t^2+1)^{\alpha_1+\alpha_2}\right] \\
&= (\alpha_1+\alpha_2)\ln(t^2+1) = \alpha_3 \ln(t^2+1) = f_3(t) \in \mathbb{V}_f
\end{aligned}
$$

што је очигледно испуњено.

А2. *асоцијативност* значи да је небитно којим се редоследом сабирају три функције из датог скупа функција

$$
\begin{aligned}
f_1(t) \oplus \big(f_2(t) \oplus f_3(t)\big) &= f_1(t) \oplus \big(\alpha_2 \ln(t^2+1) + \alpha_3 \ln(t^2+1)\big) \\
&= \alpha_1 \ln(t^2+1) + (\alpha_2+\alpha_3)\ln(t^2+1) \\
&= \ln(t^2+1)^{\alpha_1} + \ln(t^2+1)^{\alpha_2+\alpha_3} = \ln\left[(t^2+1)^{\alpha_1}(t^2+1)^{\alpha_2+\alpha_3}\right] \\
&= \ln\left[(t^2+1)^{\alpha_1+(\alpha_2+\alpha_3)}\right] = \ln\left[(t^2+1)^{(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_3}\right] \\
&= \ln\left[(t^2+1)^{\alpha_1+\alpha_2}(t^2+1)^{\alpha_3}\right] = \ln(t^2+1)^{\alpha_1+\alpha_2} + \ln(t^2+1)^{\alpha_3} \\
&= (\alpha_1+\alpha_2)\ln(t^2+1) + \alpha_3 \ln(t^2+1) \\
&= \big(\alpha_1 \ln(t^2+1) + \alpha_2 \ln(t^2+1)\big) \oplus f_3(t) = \big(f_1(t) \oplus f_2(t)\big) \oplus f_3(t)
\end{aligned}
$$

Ова особина директна је последица важења асоцијативности уобичајеног сабирања реалних бројева (видети експонент у четвртом реду).

А3. Мора постојати *неутрални елемент* бинарне операције сабирања функција

$$
\begin{aligned}
f(t) \oplus f_0(t) &= \alpha \ln(t^2+1) + 0 \ln(t^2+1) = \ln(t^2+1)^{\alpha} + \ln(t^2+1)^0 \\
&= \ln\left[(t^2+1)^{\alpha}(t^2+1)^0\right] = \ln\left[(t^2+1)^{\alpha+0}\right] = \ln\left[(t^2+1)^{\alpha}\right] = \alpha \ln(t^2+1) = f(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_0(t) \oplus f(t) &= 0 \ln(t^2+1) + \alpha \ln(t^2+1) = \ln(t^2+1)^0 + \ln(t^2+1)^{\alpha} \\
&= \ln\left[(t^2+1)^0(t^2+1)^{\alpha}\right] = \ln\left[(t^2+1)^{0+\alpha}\right] = \ln\left[(t^2+1)^{\alpha}\right] = \alpha \ln(t^2+1) = f(t)
\end{aligned}
$$

Очигледно је да је у горе наведеном скупу функција $\mathbb{V}_f$ неутрални елемент управо функција

$$f_0(t) = 0 \ln(t^2+1)\,.$$

Наравно, ова функција последица је особине скупа реалних бројева да је у њему нула неутрални елемент обичног сабирања, чак и кад је у експоненту.

А4. Такође мора постојати *инверзни елемент* за сваку функцију из скупа $\mathbb{V}_f$

$$
\begin{aligned}
f(t) \oplus \big(-f(t)\big) &= \alpha \ln(t^2+1) - \alpha \ln(t^2+1) = \ln(t^2+1)^{\alpha} + \ln(t^2+1)^{-\alpha} \\
&= \ln\left[(t^2+1)^{\alpha}(t^2+1)^{-\alpha}\right] = \ln\left[(t^2+1)^{\alpha-\alpha}\right] = \ln\left[(t^2+1)^0\right] = \ln 1 = 0 = f_0(t)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}(-f(t))\oplus f(t) &= -\alpha\ln(t^2+1)+\alpha\ln(t^2+1)=\ln(t^2+1)^{-\alpha}+\ln(t^2+1)^{\alpha}\\ &=\ln\left[(t^2+1)^{-\alpha}(t^2+1)^{\alpha}\right]=\ln\left[(t^2+1)^{-\alpha+\alpha}\right]=\ln\left[(t^2+1)^{0}\right]=\ln 1=0=f_0(t)\end{aligned}$$

Ова особина директна је последица чињенице да постоји број супротног предзнака за било који реални број, чак и када је он у експоненту.

A5. *Комутативност* значи да није битно којим се редоследом сабирају две функције из скупа $\mathbb{V}_f$

$$\begin{aligned}f_1(t)\oplus f_2(t) &= \alpha_1\ln(t^2+1)+\alpha_2\ln(t^2+1)=(\alpha_1+\alpha_2)\ln(t^2+1)\\ &=\ln(t^2+1)^{\alpha_1+\alpha_2}=\ln(t^2+1)^{\alpha_2+\alpha_1}=(\alpha_2+\alpha_1)\ln(t^2+1)\\ &=\alpha_2\ln(t^2+1)+\alpha_1\ln(t^2+1)=f_2(t)\oplus f_1(t)\end{aligned}$$

Ова особина директна је последица важења комутативности уобичајеног сабирања два реална броја, чак и када се они налазе у експоненту.

Значи да систем $\{\mathbb{V}_f,\oplus\}$ *јесте* Абелова група.

Б. Скуп реалних бројева $\mathbb{R}$ јесте *поље* у односу на уобичајено сабирање реалних бројева и множење истих скаларом.

В. *Асоцијативност* множења скаларом значи да је свеједно множи ли се функција прво једним, па другим скаларом или се прво помноже скалари (што је лакше) па се тек онда функција помножи тако добијеним производом скалара

$$\begin{aligned}b\circ(c\circ f(t)) &= b\circ(c\,\alpha\ln(t^2+1))=b\,(c\,\alpha)\ln(t^2+1)\\ &=\ln(t^2+1)^{b(c\alpha)}=\ln(t^2+1)^{(bc)\alpha}\\ &=(b\,c)\,\alpha\ln(t^2+1)=(b\,c)\circ f(t)\end{aligned}$$

Ова особина директна је последица важења комутативности множења три реална броја.

Следеће две особине тичу се међусобног односа задате две конкретне бинарне операције, сабирања функција и множења функције скаларом.

Г. Мора важити *дистрибутивност* множења једним скаларом збира две функције из $\mathbb{V}_f$

$$\begin{aligned}b\circ(f_2(t)\oplus f_3(t)) &= b\circ(\alpha_2\ln(t^2+1)+\alpha_3\ln(t^2+1))=b\circ((\alpha_2+\alpha_3)\ln(t^2+1))\\ &=b\,(\alpha_2+\alpha_3)\ln(t^2+1)=(b\,\alpha_2+b\,\alpha_3)\ln(t^2+1)\\ &=\ln(t^2+1)^{b\alpha_2+b\alpha_3}=\ln\left[(t^2+1)^{b\alpha_2}(t^2+1)^{b\alpha_3}\right]\\ &=\ln(t^2+1)^{b\alpha_2}+\ln(t^2+1)^{b\alpha_3}=b\,\alpha_2\ln(t^2+1)+b\,\alpha_3\ln(t^2+1)\\ &=b\circ f_2(t)\oplus b\circ f_3(t)\end{aligned}$$

Ова особина директно следи из дистрибутивности множења збира два реална броја једним реалним скаларом, макар такав израз био и у експоненту.

Д. Мора важити *дистрибутивност* множења збиром два скалара једне функције из $\mathbb{V}_f$

$$\begin{aligned}(c+d)\circ f(t) &= (c+d)\,\alpha\ln(t^2+1) = \ln(t^2+1)^{(c+d)\alpha} = \ln(t^2+1)^{c\alpha+d\alpha} \\ &= \ln\left[(t^2+1)^{c\alpha}(t^2+1)^{d\alpha}\right] = \ln(t^2+1)^{c\alpha} + \ln(t^2+1)^{d\alpha} \\ &= c\alpha\ln(t^2+1) + d\alpha\ln(t^2+1) = c\circ f(t) \oplus d\circ f(t)\end{aligned}$$

Ова особина директно следи из дистрибутивности множења збиром два реална скалара једног реалног броја, макар такав израз био и у експоненту.

Ђ. Такође јединични елемент поља $\mathbb{R}$ (што је неутрални елемент операције обичног множења, значи скалар 1) мора истовремено бити и *јединични елемент* бинарне операције множења функције из скупа $\mathbb{V}_f$ скаларом

$$1\circ f(t) = 1\cdot\left(\alpha\ln(t^2+1)\right) = (1\cdot\alpha)\ln(t^2+1) = \ln(t^2+1)^{1\cdot\alpha} = \ln(t^2+1)^{\alpha} = \alpha\ln(t^2+1) = f(t)\,.$$

Ова особина директна је последица чињенице да било који реални број помножен јединицом остаје непромењен, па био он и у експоненту.

Значи, будући да су све побројане особине задовољене, систем $\left\{\mathbb{V}_f, \oplus, \circ\right\}$ *јесте* ЛВП (линеарни векторски простор).

(1.7) Показати да је нулти вектор *линеарни векторски простор* над пољем реалних бројева у односу на бинарне операције

- сабирања нултих вектора: $|0\rangle \oplus |0\rangle = |0\rangle$;
- множења нултог вектора скаларом: $a \circ |0\rangle = |0\rangle$.

Систем $\{|0\rangle, \oplus, \circ\}$ биће *линеарни векторски простор* ако задовољава следеће услове:

А. Систем $\{|0\rangle, \oplus\}$ мора имати структуру *Абелове групе*, што значи да морају важити следеће особине бинарне операције сабирања вектора $\oplus$

А1. *затвореност* нултог вектора $|0\rangle$ према сабирању вектора значи да збир $|0\rangle \oplus |0\rangle$ два нулта вектора мора и сам бити нулти вектор, што је испуњено самом дефиницијом нултог вектора.

А2. *асоцијативност* значи да је небитно којим се редоследом сабирају три нулта вектора

$$(|0\rangle \oplus |0\rangle) \oplus |0\rangle = |0\rangle \oplus |0\rangle = |0\rangle = |0\rangle \oplus |0\rangle = |0\rangle \oplus (|0\rangle \oplus |0\rangle).$$

А3. *неутрални елемент* бинарне операције сабирања нултих вектора је, наравно, сам нулти вектор - када се неутрални елемент дода нултом вектору нулти вектор остаје непромењен

$$|0\rangle \oplus |0\rangle = |0\rangle .$$

А4. *инверзни елемент* нултог вектора је он сам, пошто када се они саберу дају неутрални елемент из претходног услова (нулти вектор)

$$|0\rangle \oplus inv = |0\rangle \;\Leftrightarrow\; inv = |0\rangle - |0\rangle \;\Leftrightarrow\; inv = |0\rangle ,$$

$$inv \oplus |0\rangle = |0\rangle \;\Leftrightarrow\; inv = |0\rangle - |0\rangle \;\Leftrightarrow\; inv = |0\rangle .$$

А5. *комутативност* значи да није битно којим се редоследом сабирају два нулта вектора

$$|0\rangle \oplus |0\rangle = |0\rangle \oplus |0\rangle .$$

Значи, систем $\{|0\rangle, \oplus\}$ *јесте* Абелова група.

Б. Систем $\{\mathbb{R}, +, \cdot\}$ треба да има структуру *поља*, што је у поставци задатка и речено.

В. Мора важити особина *асоцијативности* множења скаларом, што би значило да је свеједно множи ли се нулти вектор прво једним, па другим скаларом или се прво помноже скалари (што је лакше) па се тек онда помножи нулти вектор тако добијеним производом скалара

$$a \circ (b \circ |0\rangle) = a \circ |0\rangle = |0\rangle = (a \cdot b) \circ |0\rangle .$$

Следеће две особине тичу се међусобног односа задате две конкретне бинарне операције, сабирања вектора и множења вектора скаларом.

Г. Важи и *дистрибутивност* множења једним скаларом збира два нулта вектора

$$c \circ \left(|0\rangle \oplus |0\rangle \right) = c \circ |0\rangle = |0\rangle = |0\rangle \oplus |0\rangle = c \circ |0\rangle \oplus c \circ |0\rangle .$$

Д. Важи и *дистрибутивност* множења збиром два скалара једног нултог вектора

$$(b + c) \circ |0\rangle = |0\rangle = |0\rangle \oplus |0\rangle = b \circ |0\rangle \oplus c \circ |0\rangle .$$

Ђ. Последња особина која мора важити јесте да јединични елемент поља $\mathbb{R}$ (што је неутрални елемент операције обичног множења, значи скалар 1) мора истовремено бити и *јединични елемент* бинарне операције множења нултог вектора скаларом

$$1 \circ |0\rangle = |0\rangle .$$

Значи, будући да су све побројане особине задовољене, систем $\left\{ |0\rangle, \oplus, \circ \right\}$ *јесте* ЛВП (линеарни векторски простор).